MA’RUZA

TEKISLIKDA TO’G’RI CHIZIQ TENGLAMALARI. TEKISLIKDA TO’G’RI CHIZIQLARNING O’ZARO JOYLASHUVI.

Ma’ruza rejasi

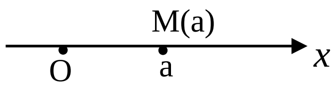
1. Dekart to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasi va unda kesmaning berilishi va uzunligi.
2. Kesmani berilgan nisbatda bo’lish.
3. Ikki nuqtadan o’tgan to’g’ri chiziq tenglamasi.
4. To’g’ri chiziqning kesmalar bilan ifodalangan va burchak koeffitsiyentli tenglamalari.
5. To’g’ri chiziqning normal va umumiy tenglamasi.
6. Ikki to’g’ri chiziq (tekislikdagi) orasidagi burchak. Ularning parallellik va perpendikulyarlik sharti.

Tayanch so’z va iboralar: Dekart sistemasi, to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasi, bir o’lchovli koordinata o’qi, ikki o’lchovli koordinatalar sistemasi, uch o’lchovli koordinatalar sistemasi, ikki nuqta orasidagi masofa, ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi, yo’naltiruvchi vektor, to’g’ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi, to’g’ri chiziqning kesmalar bo’yicha tenglamasi, to’gri chiziqning umumiy tenglamasi, to’g’ri chiziqning normal tenglamasi, ikki to’g’ri chiziq orasidagi masofa, nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa, ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak.

Eslatma. Dekart fransus olimi (1596-1650) bo’lib, birinchi marta o’zaro to’g`ri burchak ostida kesishgan yo’nalishlar va ularning kesishish nuqtasini «orientasiya»sistemasi (koordinatalar sistemasi) sifatida tavciya etgan.

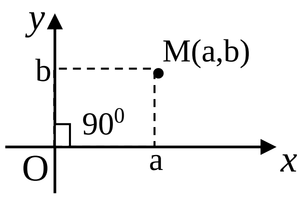
Kesishuv nuqtasi xisobning boshi, yo’nalishi esa koordinat o’qlari sifatida qabul qilingan.

I. a)



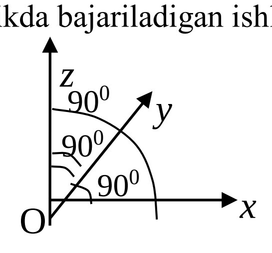
Faqat tug`ri chiziqda bajariladigan ishda bir o’lchovli koordinata o’qi ishlatiladi (O*x*).

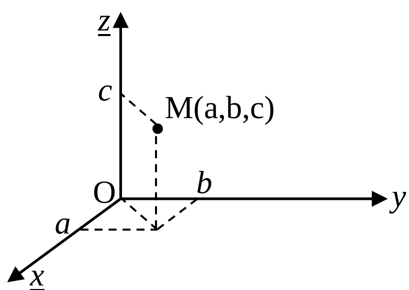
b)



Tekislikda bajariladigan ishlar uchun ikki o’lchovli (Oxy) - koordinatalar sistemasi ishlatiladi.

c)





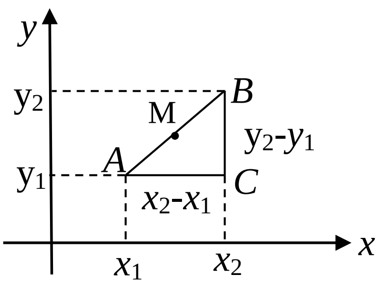
Fazoda (bu fazo evklid fazosi ham deyiladi) O*xyz* – uch o’lchovli koordinatalar ishlatiladi.

Nuqta koordinatalar sistemasida qo’yidagicha beriladi.

a) M(a) b) M(a, b) c) M(a, b, c)

II.

Kesma uchlari koordinatalari bilan beriladi. Masalan, A (a_1,a_2), B (b_1,b_2)



AB- kesma.
Pifagor teoremasiga ko'ra ΔABC dan
$AB^2 = BC^2 + AC^2$ bundan, $AB = \sqrt{BC + AC^2}$

Shakldan ko'rinib turibdiki BC=b_1-a_1, AC=a_2-b_2 .

Demak, $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ Koordinatalar nomlariga mos belgilashlarni kiritsak,ya`ni A($x_1 y_1$), B(x_2 y_2) desak,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

berilgan ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek uch-o'lchovli fazoda $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish formulasi qo'yidagicha bo'ladi.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{2}$$

III. Aytaylik, $C(x_3, y_3, z_3)$ nuqta berilgan AB kesmani $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatan bo'luvchi nuqta bo'lsin. AC va CB bir kesmaning ikki qismi bo'lgani uchun $\overline{AC} \| \overline{CB} \Rightarrow$

$$\overline{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1), \overline{CB}(x_2 - x_3, y_2 - y_3) \Rightarrow \lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \tag{3}$$

Bu berilgan kesmani $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatda bo'luvchi uchinchi C nuqtaning koordinatalarini topish formulasi bo'ladi. Xususiy xolda $\lambda = 1$ bolsa, keyingi formula kesmani teng ikkita bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasiga aylanadi:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{4}$$

IV. Ma`lumki, tekislikdagi har qanday nuqtadan bitta va faqat bitta to'g`ri chiziq o'tadi. Nuqtalar $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ bo'lsin. Shu chiziqdagi (ixtiyoriy) uchinchi $M(x, y)$ nuqtani olsak, vektorlarning parallelik alomatiga ko'ra ,quyidagini yoza olamiz: $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$M(x, y)$ nuqta ixtiyoriy bo'lganligi uchun u chiziqning xoxlagan bo'lishi mumkin. Shu sababli,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{5}$$

tenglik berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi. Chunki, undagi $M(x, y)$ nuqta uning xohlagan nuqtasini ko'rsata oladi.
Uch o'lchovli fazo uchun bu formula quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (6)$$

Aytaylik, $\overline{P}(m,n,p)-$ vektor AB –vektorga parallel bo’lsin. Unda (6) formulani quyidagicha yoza olamiz va $\overline{P}(m,n,p)$ ni yo’naltiruvchi vektor deb ataymiz:

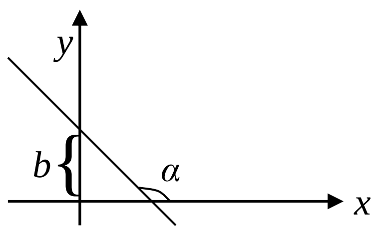
$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \qquad (7)$$

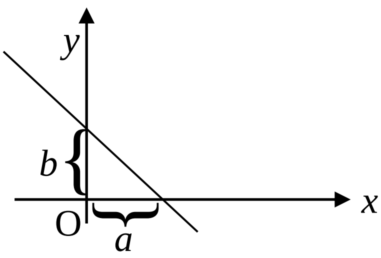
Bu berilgan A (x_1,y_1,z_1) nuqtadan o’tib , $\overline{P}(m,n,p)$ vektorga parallel bo’lgan to’g`ri chiziq tenglamasi deyiladi.

V. Endi (5) tenglamaning boshqa xususiy ko’rinishlarini o’rganamiz.

a) (5) ni y-ga nisbatan yechsak , $y=\frac{y_2-y_2}{x_2-x_1}x+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$ kelib chiqadi.

Agar tenglamani chizma bilan taqqoslasak, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}tg\alpha,\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}=b$ ekanligini ko’ramiz.





Demak, chiziq tenglamasi quyidagicha bo’lar ekan:

y =kx+b (8)

Bunda α -to’g`ri chiziq bilan Ox o’qining musbat yo’nalishi orasidagi burchak, b esa chiziqning Oy o’qidan kesgan kesmasi bo’lganligi uchun,chiziq tenglamasini (8) to’g’ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi. Shuningdek:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (9)$$

to’g’ri chiziqning kesmalar bilan ifodalangan tenglamasi deyiladi.

$$Ax+By+C=0 \qquad (10)$$

to'g’i chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Shakldan va barcha tenglama ko’rinishlaridan kelib chiqadiki, har qanday ikki noma`lumli birinchi darajali bitta tenglama tekislikdagi to’g`ri chiziqni berar ekan va uning grafigi to’gri chiziqni berar ekan.

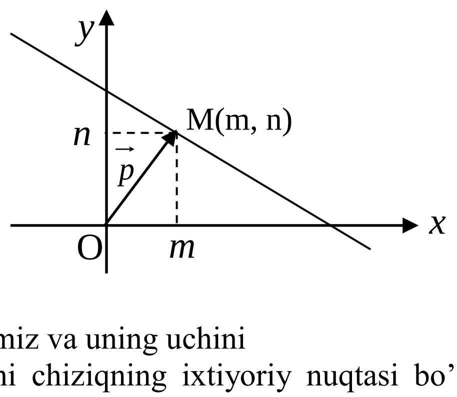
Savollar: 1. x=a qanday chiziq tenglamasi?

2.y=b qanday chiziq tenglamasi?

3.y=x qanday chiziq tenglamasi?

VI. To’g`ri chiziqning normal tenglamasi.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (11)$$



tekislikda berilgan $\vec{P}(m,n)$ vektorning uchidan unga perpendikulyar bo’lgan bitta va faqat bitta chiziq (11) o’tkazish mumkin . Vektorni yasaymiz va uning uchini M(m,n) nuqta bilan belgilaymiz. N(x,y) esa o’sha o’tuvchi chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin deymiz. Shartga ko’ra $\vec{P}\perp I\cdot I\supset \vec{MN}\Rightarrow m(x-m)+n(y-n)=0$

$\Rightarrow mx + ny - (m^2 + n^2) = 0$. Agar $p = |\vec{P}| = \sqrt{m^2 + n^2}$ ekanligin hisobga olsak va tenglamani p ga bo'lsak, quyidagiga ega bo'lamiz: $\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}x + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}y - \sqrt{m^2+n^2} = 0$

Ko'rinib turibdiki: bunda

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} = \sin\alpha$$

Demak, chiziq tenglamasi qo'yidagi ko'rinishga ega bo'lar ekan:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Bunda α berilgan vektorning yo'naltiruvchi burchagi , p esa koordinata boshidan chiziqqa tushirilgan perpendikulyar (normal)ning uzunligi bo'lganligi uchun tenglamaning nomi to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb atalgan.

VII. To'g`ri chiziq umumiy tenglamasini normal shaklga keltirish.

$$Ax + By + C = 0$$

berilgan chiziq tenglamasi bo'lsin. Normal ko'paytuvchi $\mu = \sqrt{A^2 + B^2}$ ni topib, tenglamani unga bo'lamiz:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+\mathbf{B}^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \tag{12}$$

Agar x va y larning koeffitsientlarini kvadtarlarga ko'tarib qo'shsak, birga tengligi chiqadi. VI banddagi koeffitsiyentlar bilan solishtirsak,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\alpha, \; p = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ekanligiga iqror bo'lamiz.

VIII. Ikki to'g`ri chiziq orasidagi masofa.

Aytaylik, ikki parallel to'g`ri chiziq normal tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_2 = 0$$

Demak, ular orasidagi masofa

$$H = |p_1 - p_2| \tag{13}$$

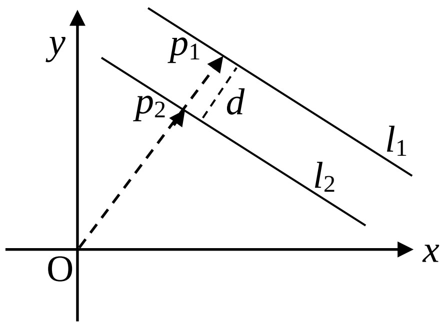
bo'ladi.

IX. Nuqta $M(x_0, y_0)$ -dan $Ax + By + C = 0$ chiziqqacha masofa quyidagicha topiladi:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right| \tag{14}$$

Haqiqatdan ham, shunday ekanligini isbotlash uchun M nuqtadan $Ax+By+C=0$ chiziqqa parallel chiziq o'tkazamiz. Uning tenglamasi:

Bundan

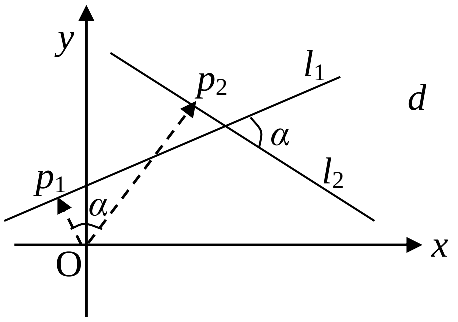


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + by - (Ax_0 - By_0) = 0$$

$$d = |p_1 - p_2| = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{-Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2+B^2}} \right| = \left| \frac{C + Ax_0 + By_0}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|$$

.

X. Tekislikdagi ikki to’g`ri chiziq orasidagi burchak quyidagicha topiladi:



$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (15)$$

Haqiqatdan ham, agar $A_1x + B_1y + C_1 = 0(1_1)$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0\ (l_2)$ berilgan ikki chiziq tenglamalari bo’lsa, $\overline{P}_1(A_1, B_1)$ va $\overline{P}_2(A_1, B_1)$ vektorlar shu ikki to’g`ri chiziq normallariga parallel vektorlardir.

Bundan $\angle(\overline{P}_1, \overline{P}_2) = \angle(l_1, l_2)$ kelib chiqadi. Bu burchakni α deb belgilasak, ikki vektor orasidagi burchak formulasiga ko’ra yo’qoridagi formulaga ega bo’lamiz.

Xususiy holda $l_1 \| l_2 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ (16)

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \alpha = 90^0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (17)$$

O’z navbatida (16) va (17) formulalar berilgan ikki to’g’ri chiziqning mos ravishda parallelik va perpendikulyarlik shartlari deb aytiladi.